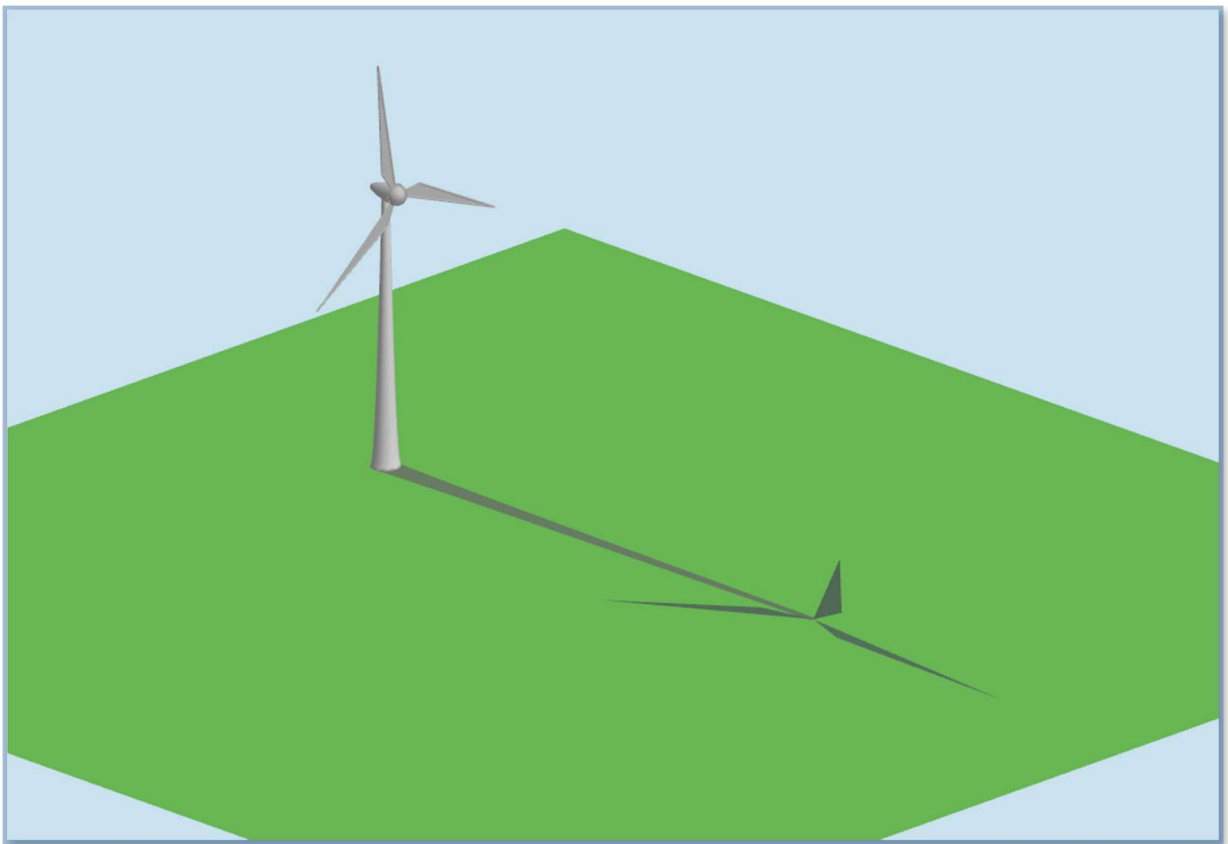


**Lineare Algebra für das berufliche Gymnasium Technik**  
**— Wissensspeicher und Lernsituationen —**



# Inhaltsverzeichnis

|  |    |
|--|----|
| Einleitung .....   | 3  |
| Auszug KC .....  | 3  |
| Wissensspeicher .....  | 6  |
| Matrizen und Matrixoperationen .....   | 6  |
| Schreibweisen .....  | 6  |
| Determinante einer Matrix .....  | 6  |
| Einheitsmatrix .....   | 6  |
| Addition von Matrizen .....  | 6  |
| Skalare Multiplikation .....   | 7  |
| Matrizenmultiplikation .....   | 7  |
| Potenzieren von Matrizen .....   | 7  |
| Transponierte Matrix .....   | 7  |
| Inverse Matrix .....   | 8  |
| Anwendungen von Matrizen in der Technik .....  | 8  |
| Spiegelmatrizen .....  | 8  |
| Spiegelung an der y-Achse .....  | 8  |
| Punktspiegelung am Ursprung .....  | 9  |
| Spiegelung entlang der Ursprungsgeraden .....  | 9  |
| Spiegelung entlang der Geraden .....   | 9  |
| Fakultativ: Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung .....   | 10 |
| Projektionsmatrizen .....  | 12 |
| Rotationsmatrizen (Drehmatrizen) .....   | 14 |
| Drehung im $\mathbb{R}^2$ .....  | 14 |
| Drehung im $\mathbb{R}^3$ .....  | 14 |
| Drehung um die x-Achse .....   | 14 |
| Drehung um die y-Achse .....   | 15 |
| Drehung um die z-Achse .....   | 15 |
| Fakultativ: Drehung um Ursprungsgerade mit dem Richtungsvektor $\vec{r}^0 = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{pmatrix}$ .....   | 16 |
| Drehung des Einheitsvektors $\vec{e}_x$ um $\vec{r}^0$ um den Winkel $\alpha$ : .....  | 16 |
| Drehung des Einheitsvektors $\vec{e}_y$ um $\vec{r}^0$ um den Winkel $\alpha$ : .....  | 17 |
| Drehung des Einheitsvektors $\vec{e}_z$ um $\vec{r}^0$ um den Winkel $\alpha$ : .....  | 18 |
| Fakultativ: Drehung um Ursprungsgerade mit dem Richtungsvektor $\vec{r}^0 = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$ ..... | 18 |
| Lernsituationen .....  | 22 |
| LS Bebauung .....  | 22 |
| Erwartungshorizont .....   | 25 |
| LS Windkraftanlage .....   | 27 |
| Erwartungshorizont .....   | 29 |

## Einleitung

Mit dem weiterentwickelten Kerncurriculum für das Fach Mathematik der gymnasialen Oberstufe in Niedersachsen haben sich für die Beruflichen Gymnasien mit dem Schwerpunkt Technik Änderungen ergeben, die durch die Anpassung des KC an die Bildungsstandards begründet sind.

## Auszug KC

| L3 Leitidee: Raum und Form  |   |
|---|---|
| Die Auseinandersetzung mit zeichnerischen Darstellungen von Körpern fördert in besonderem Maße das geometrische Vorstellungsvermögen. Die Koordinatisierung und die Methoden der Analytischen Geometrie ermöglichen die Beschreibung und Untersuchung einfacher geometrischer Objekte und ihrer Lagebeziehungen im Raum. Die erarbeiteten Werkzeuge werden zur Modellierung von Realsituationen verwendet.  |   |
| grundlegendes Anforderungsniveau  | erhöhtes Anforderungsniveau   |
| Die Schülerinnen und Schüler ...  |   |
| <ul style="list-style-type: none"><li>• nutzen die bildliche Darstellung und Koordinatisierung zur Beschreibung von Punkten, Strecken, ebenen Flächen und einfachen Körpern.</li><li>• wenden die Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren an und veranschaulichen sie geometrisch.</li><li>• überprüfen zwei Vektoren auf Kollinearität.</li><li>• wenden Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten an (BG T).</li><li>• beschreiben Geraden und Ebenen durch Gleichungen in Parameterform (BG T).</li><li>• untersuchen die Lagebeziehungen von Geraden und bestimmen Schnittpunkte (BG T).</li><li>• deuten das Skalarprodukt geometrisch als Ergebnis einer Projektion.</li></ul> |   |
|   | <ul style="list-style-type: none"><li>• beschreiben Ebenen durch Gleichungen in Normalen- und Koordinatenform (BG T).</li><li>• wechseln zwischen den verschiedenen Darstellungsformen von Ebenen (BG T).</li><li>• untersuchen die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen sowie von Ebenen und lösen Schnittprobleme (BG T).</li><li>• beschreiben Streckungen, Spiegelungen und Drehungen um die Koordinatenachsen im Raum, sowie die Projektion vom Raum in die Ebene mit Matrizen (BG T).</li></ul> |

KC-GO, Landtagsfassung, Seite 29,30

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Lernbereich: Raumschauung und Koordinatisierung</b>  | <b>eA</b> |
| <p><b>Intentionen</b></p> <p>Ausgehend von Orientierungsproblemen im Raum aus den Bereichen</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Konstruktion geradlinig und ebenflächig begrenzter Baukörper (BG T)</li> <li>• Gradlinige Bewegungen im Raum (Flug- und Maschinenbewegungen) (BG T)</li> <li>• Spielgeräte (Aufbau, Konstruktion) (BG GuS, BG W)</li> </ul> <p>werden der Nutzen und die Bedeutung des dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems erkannt. Dabei wird an die Erfahrungen aus dem Sekundarbereich I angeknüpft. Die Auseinandersetzung mit zeichnerischen Darstellungen von Körpern fördert in besonderem Maße das geometrische Vorstellungsvermögen. Die Nutzung von Realmodellen und Geometriesoftware unterstützt diesen Prozess.</p> <p>Die Koordinatisierung und die Methoden der Analytischen Geometrie ermöglichen eine Beschreibung und Untersuchung geometrischer Objekte in der Ebene und insbesondere im Raum.</p> <p>Streckungen, Spiegelungen und Drehungen um die Koordinatenachsen im Raum sowie die Projektion vom Raum in die Ebene werden mit Matrizen beschrieben (BG T).</p> <p>Unterschiedliche Darstellungsformen von Geraden- und Ebenengleichungen ermöglichen eine flexible Untersuchung von Lagebeziehungen. Deshalb ist unter Umständen der Wechsel zwischen Darstellungsformen notwendig (BG T).</p> <p>Das Skalarprodukt und das Vektorprodukt (BG T) und seine geometrische Deutung ermöglichen metrische Berechnungen.</p>  |           |
| <p><b>Kern</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Raumschauung und Koordinatisierung <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Punkte und Vektoren in Ebene und Raum durch Tupel beschreiben</li> <li>▪ die bildliche Darstellung und Koordinatisierung zur Beschreibung von Punkten, Strecken, ebenen Flächen und einfachen Körpern nutzen</li> <li>▪ Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren anwenden und geometrisch veranschaulichen</li> <li>▪ Kollinearität zweier Vektoren überprüfen</li> <li>▪ <b>Streckungen, Spiegelungen und Drehungen um die Koordinatenachsen im Raum, sowie die Projektion vom Raum in die Ebene mit Matrizen beschreiben und nutzen (BG T)</b></li> <li>▪ Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform verwenden (BG T)</li> <li>▪ Ebenengleichungen in Normalen- und Koordinatenform verwenden (BG T)</li> <li>▪ zwischen den Darstellungsformen wechseln (BG T)</li> </ul> </li> <li>• Maße und Lagen <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Abstände zwischen Punkten bestimmen</li> <li>▪ Abstände zwischen Geraden und Ebenen bestimmen (BG T)</li> <li>▪ Skalarprodukt geometrisch als Ergebnis einer Projektion deuten und verwenden</li> <li>▪ Orthogonalität zweier Vektoren überprüfen</li> <li>▪ Winkelgrößen bestimmen</li> <li>▪ Vektorprodukt geometrisch deuten und verwenden (BG T)</li> <li>▪ Lagebeziehungen von Geraden, Geraden und Ebenen sowie von Ebenen untersuchen und Schnittprobleme lösen (BG T)</li> <li>▪ den Gauß-Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme erläutern und in geeigneten Fällen anwenden</li> </ul> </li> </ul> |           |
| <p><b>Fakultative Erweiterungen:</b></p> <p>Spatprodukt, Raumkurven in Parameterform, Kreis- und Kugelgleichung (BG T)</p>  |           |
| <p><b>Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:</b></p> <p>Algorithmus und Zahl; Messen; Raum und Form</p>   |           |
| <p><b>Online-Material:</b></p> <p>BG: Spielgeräte, Matrizen für Projektion, Drehung und Spiegelung</p> <p>KC-GO, Landtagsfassung, Seite 66</p>  |           |

Insbesondere ist die bislang nicht vorhandene Lineare Algebra neu hinzugekommen. Im Folgenden soll diese Thematik beleuchtet werden indem

- grundlegende Zusammenhänge zusammengefasst werden.
- Anwendungen für Matrizen-Operationen erläutert werden.
- fakultative Erweiterungen für Matrizen-Operationen aufgezeigt werden.
- an Lernsituationen mögliche Anwendungsszenarien beschrieben werden.

Es wird grundsätzlich nicht erwartet, dass eine Herleitung der verschiedenen Matrizen im Unterricht erfolgt – dies sollte nur für einfache Fälle geschehen - , vielmehr sollte das Augenmerk auf dem sicheren Umgang mit diesen Matrizen in entsprechenden Anwendungssituationen liegen.

# Wissensspeicher

## Matrizen und Matrixoperationen

### Schreibweisen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1..m, j=1..n} \text{ ist eine } m \times n \text{ Matrix mit } m\text{-Zeilen und } n\text{-Spalten}$$

Matrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  mit den Spaltenvektoren  $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$  und den Zeilenvektoren  $(a_{11} \ a_{12})$  und  $(a_{21} \ a_{22})$

### Determinante einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) \cdot (-2) - 3 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 2 - (-2) \cdot (-2) \cdot 2 = 1$$

### Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Addition von Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 3+1 \\ 2+4 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

## Skalare Multiplikation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad k = 3 \quad k \cdot A = 3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

## Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen können nur dann multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl der linken mit Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmt.

$$A_{lm} \cdot B_{mn} = C_{ln}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 & (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 10 & 24 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & -2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & -2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & -5 \\ 7 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation von Matrizen ist nicht kommutativ.

## Potenzieren von Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 37 & 81 \\ 54 & 118 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 199 & 435 \\ 290 & 634 \end{pmatrix}$$

## Transponierte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{aus der ersten Zeile von } A \text{ wird die erste Spalte von } A^T.$$

$$(A^T)^T = A$$

## Inverse Matrix

falls  $\det(A) \neq 0$  gilt,

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

## Anwendungen von Matrizen in der Technik

### Spiegelmatrizen

Spiegelungen sind lineare Abbildungen vom  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Z.B.: Im  $\mathbb{R}^2$

Die gespiegelten Einheitsvektoren des  $\mathbb{R}^2$  bilden die Spalten der Spiegelmatrix.

### Spiegelung an der y-Achse

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

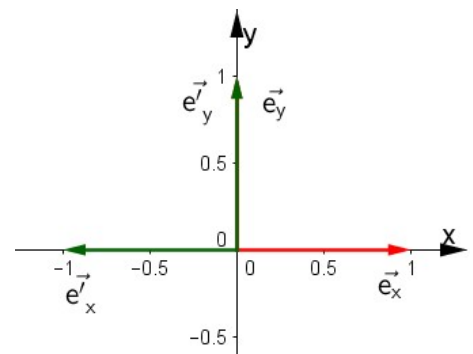
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow P\vec{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$





## Punktspiegelung am Ursprung

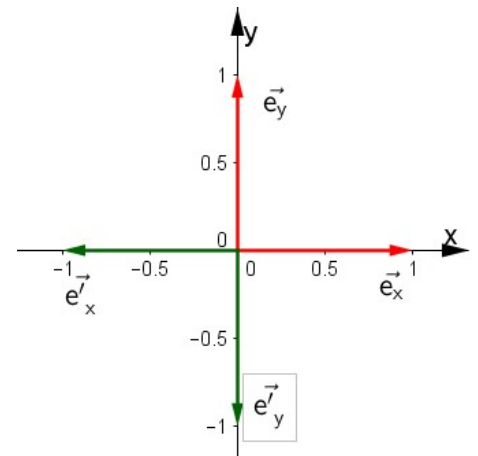
$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{P}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$



## Spiegelung entlang der Ursprungsgeraden $\vec{r} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$

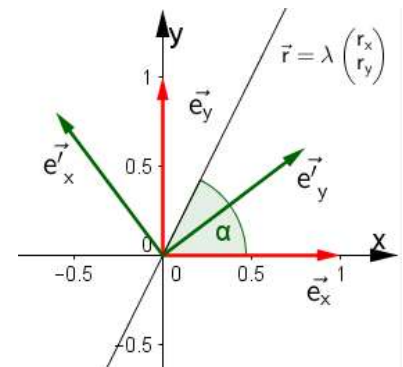
$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sin 2\alpha \\ -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{r} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha = \arctan\left(\frac{2}{1}\right) = 63,43^\circ \Rightarrow \vec{P}' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$



## Spiegelung entlang der Geraden $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$

Soll ein Punkt P mit dem Ortsvektor  $\vec{p}$  an der Geraden

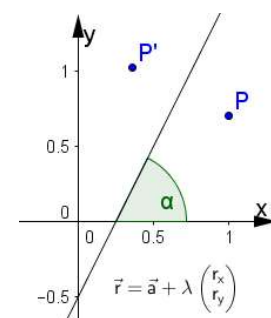
$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$  gespiegelt werden, wird dieser zunächst als

$\vec{p}^a = \vec{p} - \vec{a}$  an der zu  $\vec{r}$  parallelen Ursprungsgeraden  $\lambda \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}$

gespiegelt und anschließend wieder um  $\vec{a}$  verschoben.

$$\vec{p}' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p} - \vec{a} \end{pmatrix} + \vec{a}$$

Beispiel:



$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda = \arctan\left(\frac{2}{1}\right) = 63,43^\circ$$

$$\Rightarrow \vec{P}' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,6 \\ 3,8 \end{pmatrix}$$

Z.B.: Im  $\mathbb{R}^3$

### Fakultativ: Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = 0$$

mit  $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ , Normalenvektor der Ebene,  $\vec{a} = \begin{pmatrix} n_y \\ -n_x \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} n_z \\ 0 \\ -n_x \end{pmatrix}$ , Vektoren, die in der Ebene

liegen.

Man erhält die Elemente der Matrix durch die Lösung des Gleichungssystems

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}, \text{ Spiegelmatrix mit noch unbekanntem Elementen.}$$

$$\vec{a} = S \cdot \vec{a} \quad \text{Da } \vec{a} \text{ in der Ebene liegt, wird er auf sich selbst gespiegelt.}$$

$$\vec{b} = S \cdot \vec{b} \quad \text{Da } \vec{b} \text{ in der Ebene liegt, wird er auf sich selbst gespiegelt.}$$

$$-\vec{n} = S \cdot \vec{n} \quad \text{Der senkrecht zur Ebene stehende Normalenvektor } \vec{n} \text{ wird negativ.}$$

Dies führt zu 9 Gleichungen mit 9 Unbekannten.

$$\Rightarrow S = \frac{1}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \begin{pmatrix} -n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 & -2n_x \cdot n_y & -2n_x \cdot n_z \\ -2n_y \cdot n_x & n_x^2 - n_y^2 + n_z^2 & -2n_y \cdot n_z \\ -2n_z \cdot n_x & -2n_z \cdot n_y & n_x^2 + n_y^2 - n_z^2 \end{pmatrix},$$

falls mit dem Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}^0$  gerechnet wird, vereinfacht sich die Matrix zu

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} -2n_x^2 + 1 & -2n_x \cdot n_y & -2n_x \cdot n_z \\ -2n_y \cdot n_x & -2n_y^2 + 1 & -2n_y \cdot n_z \\ -2n_z \cdot n_x & -2n_z \cdot n_y & -2n_z^2 + 1 \end{pmatrix},$$

multipliziert man S mit  $-1$ , erhält man die Reflexionsmatrix R, mit der ein Punkt P an der Ebene reflektiert wird.

$$\Rightarrow R = \frac{-1}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \begin{pmatrix} -n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 & -2n_x \cdot n_y & -2n_x \cdot n_z \\ -2n_y \cdot n_x & n_x^2 - n_y^2 + n_z^2 & -2n_y \cdot n_z \\ -2n_z \cdot n_x & -2n_z \cdot n_y & n_x^2 + n_y^2 - n_z^2 \end{pmatrix}, \text{ bzw mit } \vec{n}^0$$

$$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} 2n_x^2 - 1 & 2n_x \cdot n_y & 2n_x \cdot n_z \\ 2n_y \cdot n_x & 2n_y^2 - 1 & 2n_y \cdot n_z \\ 2n_z \cdot n_x & 2n_z \cdot n_y & 2n_z^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Will man an einer beliebigen Ebene  $n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = k$  spiegeln, ist zunächst der Punkt um einen Stützvektor der Ebene zu verschieben, an der Ursprungsebene  $n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = 0$  zu spiegeln und anschließend wieder zurück zu verschieben.

## Projektionsmatrizen

Projektionen sind lineare Abbildungen vom  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

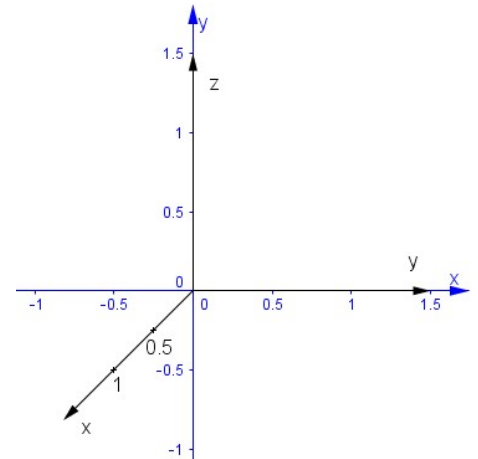
Z.B.: Vom  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Will man räumliche Objekte in einer Ebene abbilden (z.B.: 3D-Objekte am Bildschirm), muss man die Koordinaten des Raumes mit Hilfe von Projektionsmatrizen in die Ebene abbilden.

Hierzu bildet man die Einheitsvektoren des Raumes auf der Ebene unter Beachtung der Projektionsrichtung ab.

Sollen z.B.: Raumkoordinaten in das nebenstehend abgebildete ebene Koordinatensystem abgebildet werden, werden die Einheitsvektoren folgendermaßen abgebildet.

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

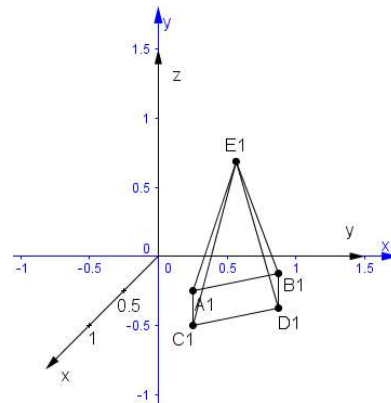
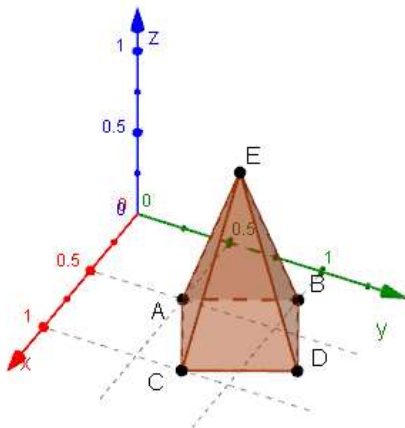


Die Abbildungen der Basisvektoren aus dem  $\mathbb{R}^3$  bilden die Spalten der Projektionsmatrix P.

$$P = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Pyramide mit den Punkten

$A(0,5 | 0,5 | 0)$ ,  $B(0,25 | 1 | 0)$ ,  $C(1 | 0,75 | 0)$ ,  $D(0,75 | 1,25 | 0)$  und  $E(0,625 | 0,875 | 1)$



wird dann durch Multiplikation der Punkte mit der Projektionsmatrix P auf die Punkte

$$A1 = P \cdot A = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,25 \end{pmatrix}, \quad B1 = P \cdot B = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,875 \\ -0,125 \end{pmatrix}$$

$$C1 = P \cdot C = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \quad D1 = P \cdot D = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,875 \\ 1,25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,875 \\ -0,375 \end{pmatrix}$$

$$E1 = P \cdot E = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,625 \\ 0,875 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,563 \\ 0,688 \end{pmatrix} \text{ abgebildet.}$$

Ändert man die Projektionsrichtung, dann wird P z.B.: zu:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -0,3 & -0,3 & 1 \end{pmatrix}$$

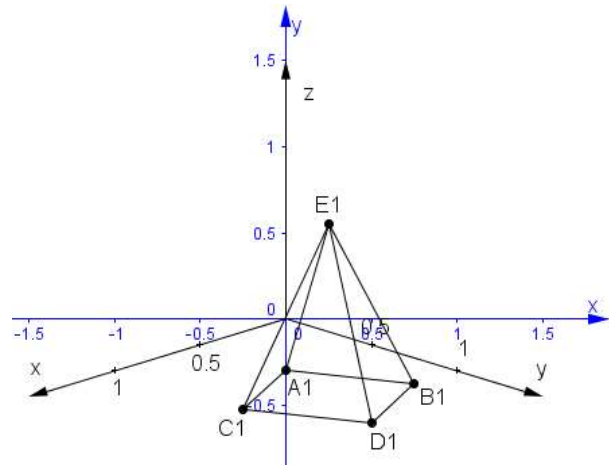
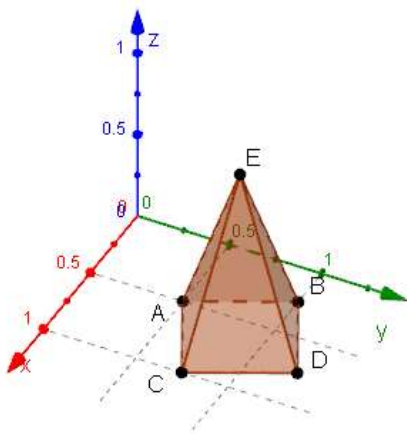
Die Pyramide wird dann durch Multiplikation der Punkte mit der Projektionsmatrix P auf die Punkte

$$A1 = P \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -0,3 & -0,3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,3 \end{pmatrix}, \quad B1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -0,3 & -0,3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 \\ -0,375 \end{pmatrix}$$

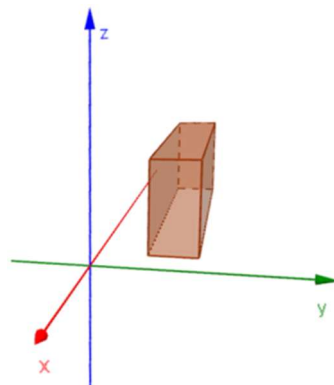
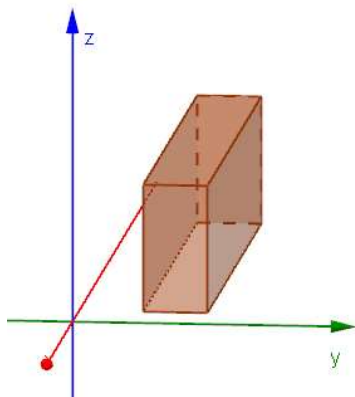
$$C1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -0,3 & -0,3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,525 \end{pmatrix}, \quad D1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -0,3 & -0,3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,875 \\ 1,25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,6 \end{pmatrix}$$

$$E1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -0,3 & -0,3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,625 \\ 0,875 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,55 \end{pmatrix}$$

abgebildet.



Es handelt sich bei den obigen Projektionen um Parallelprojektionen, die keine perspektivischen Verzerrungen beinhalten. Hierzu wären Projektionsmatrizen notwendig, wie sie bei der Programmierung von Computerspielen verwendet werden (in GeoGebra kann man diese Verzerrung in der 3D-Ansicht nutzen, um den Eindruck räumlicher Tiefe zu vermitteln).



## Rotationsmatrizen (Drehmatrizen)

Drehungen um den Ursprung sind lineare Abbildungen, die sich mit einer Matrix beschreiben lassen.

Die Spalten der Matrix sind dabei die um den Winkel  $\alpha$  gedrehten Einheitsvektoren  $\vec{e}$ .

### Drehung im $\mathbb{R}^2$

Die Basisvektoren des  $\mathbb{R}^2$  werden abgebildet auf:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \cos \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

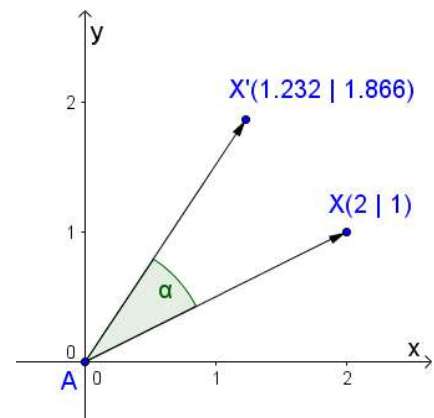
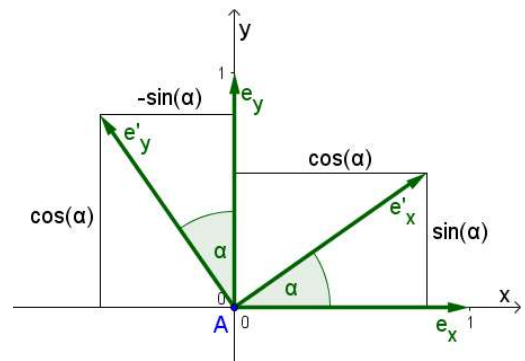
$$\begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = \sin \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = R_\alpha \cdot \vec{x}$$

z.B:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha = 30^\circ \Rightarrow R_\alpha = \begin{pmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,232 \\ 1,866 \end{pmatrix}$$



### Drehung im $\mathbb{R}^3$

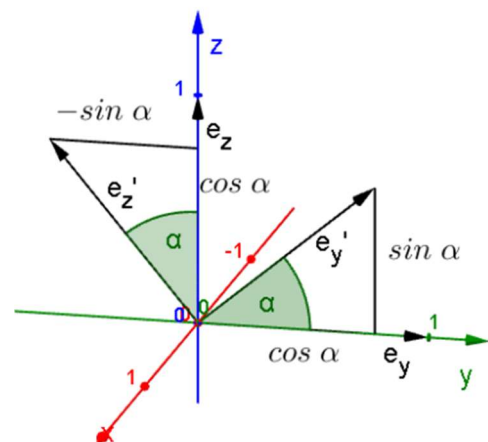
#### Drehung um die x-Achse

Blick in Richtung x-Achse y-Achse nach rechts, z-Achse nach oben

Die Basisvektoren des  $\mathbb{R}^3$  werden abgebildet auf:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$



$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}_z' = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_{\alpha,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

### Drehung um die y-Achse

Blick in Richtung y-Achse z-Achse nach rechts, x-Achse nach oben

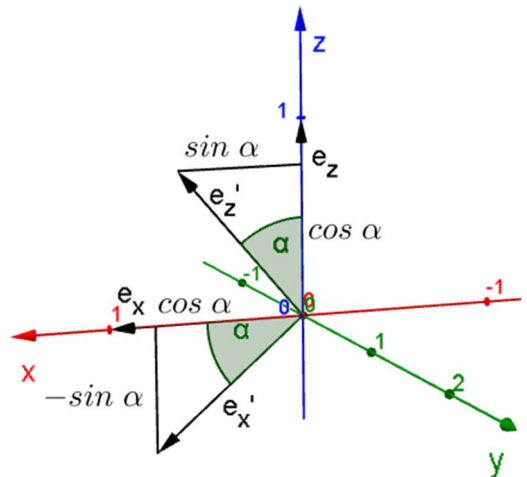
Die Basisvektoren des  $\mathbb{R}^3$  werden abgebildet auf:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}_x' = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ -\sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}_y' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}_z' = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_{\alpha,y} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$



### Drehung um die z-Achse

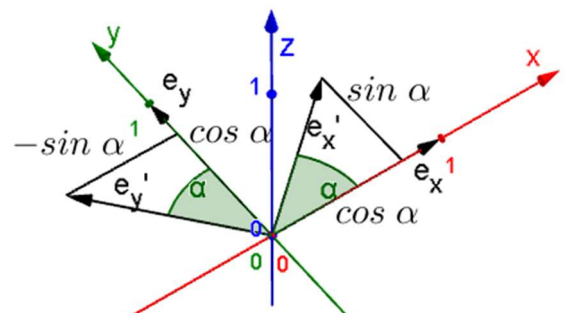
Blick in Richtung z-Achse x-Achse nach rechts, y-Achse nach oben

Die Basisvektoren des  $\mathbb{R}^3$  werden abgebildet auf:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}_x' = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}_y' = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}_z' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



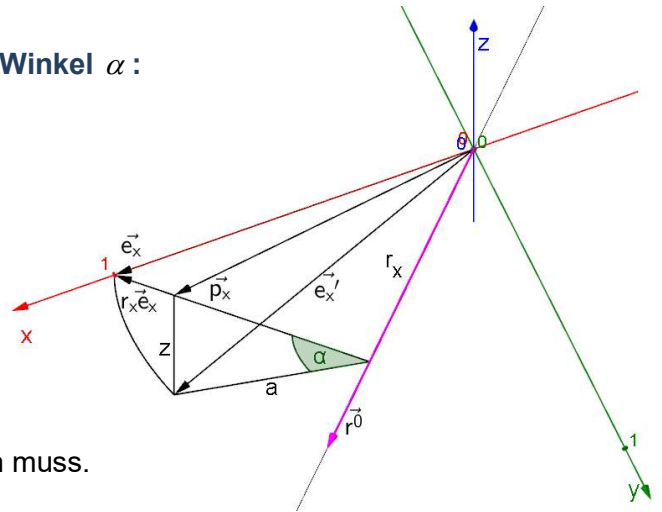
$$\Rightarrow R_{\alpha,z} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Fakultativ: Drehung um Ursprungsgerade mit dem Richtungsvektor**  $\vec{r}^0 = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{pmatrix}$

**Drehung des Einheitsvektors  $\vec{e}_x$  um  $\vec{r}^0$  um den Winkel  $\alpha$  :**

$$r_x = \vec{e}_x \cdot \vec{r}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{pmatrix} = r_x$$

$$r_x \vec{e}_x = \vec{e}_x - r_x \vec{r}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_x^2 \\ r_x \cdot r_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - r_x^2 \\ -r_x \cdot r_y \\ 0 \end{pmatrix},$$



da der Vektor  $\vec{r}^0$  um den Faktor  $r_x$  verkürzt werden muss.

Mit  $r_y^2 = 1 - r_x^2$  (Pythagoras) folgt  $r_x \vec{e}_x = \begin{pmatrix} r_y^2 \\ -r_x \cdot r_y \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$$a = \left| r_x \vec{e}_x \right| = \left| \begin{pmatrix} r_y^2 \\ -r_x \cdot r_y \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{r_y^4 + (r_x \cdot r_y)^2} = \sqrt{r_y^4 + r_x^2 \cdot r_y^2} = \sqrt{r_y^2 (r_y^2 + r_x^2)} = r_y, \text{ da } r_y^2 + r_x^2 = 1$$

Damit wird  $z = -\sin \alpha \cdot r_y$

$$\vec{p}_x = r_x \vec{r}^0 + \cos \alpha \cdot r_x \vec{e}_x = \begin{pmatrix} r_x^2 \\ r_x \cdot r_y \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \alpha \cdot \begin{pmatrix} r_y^2 \\ -r_x \cdot r_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x^2 + \cos \alpha \cdot r_y^2 \\ r_x \cdot r_y + \cos \alpha \cdot (-r_x \cdot r_y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit  $r_x^2 = 1 - r_y^2$  folgt

$$\vec{p}_x = \begin{pmatrix} r_x^2 + \cos \alpha \cdot r_y^2 \\ r_x \cdot r_y + \cos \alpha \cdot (-r_x \cdot r_y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x^2 + \cos \alpha \cdot (1 - r_x^2) \\ r_x \cdot r_y \cdot (1 - \cos \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x^2 + \cos \alpha - \cos \alpha \cdot r_x^2 \\ r_x \cdot r_y \cdot (1 - \cos \alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_x = \begin{pmatrix} r_x^2 \cdot (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \\ r_x \cdot r_y \cdot (1 - \cos \alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, der Einheitsvektor  $\vec{e}_x$  wird durch die Drehung auf den Vektor  $\vec{e}_x'$  abgebildet.



$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}_x' = \begin{pmatrix} r_x^2 \cdot (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \\ (1 - \cos \alpha) \cdot r_x \cdot r_y \\ -r_y \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

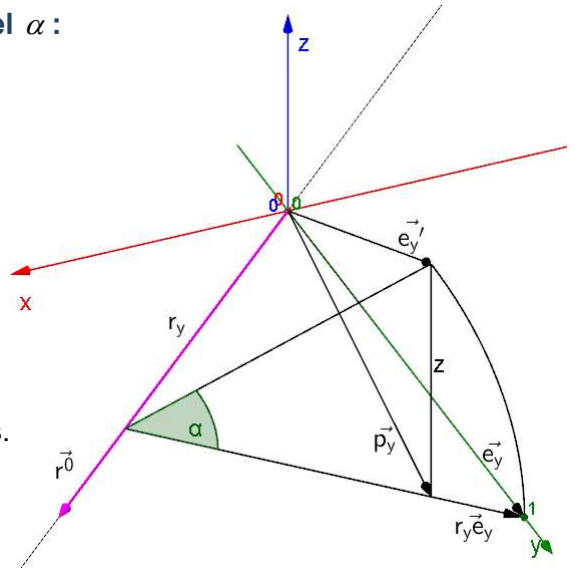
Drehung des Einheitsvektors  $\vec{e}_y$  um  $\vec{r}^0$  um den Winkel  $\alpha$  :

$$r_y = \vec{e}_y \cdot \vec{r}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{pmatrix} = r_y$$

$$r_y \vec{e}_y = \vec{e}_y - r_y \vec{r}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_x r_y \\ r_y^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_x \cdot r_y \\ 1 - r_y^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da der Vektor  $\vec{r}^0$  um den Faktor  $r_y$  verkürzt werden muss.

$$\text{Mit } r_x^2 = 1 - r_y^2 \text{ (Pythagoras) folgt } r_y \vec{e}_y = \begin{pmatrix} -r_x \cdot r_y \\ r_x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



$$a = \left| r_y \vec{e}_y \right| = \left| \begin{pmatrix} -r_x \cdot r_y \\ r_x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(r_x \cdot r_y)^2 + r_x^4} = \sqrt{r_x^2 \cdot r_y^2 + r_x^4} = \sqrt{r_x^2 (r_y^2 + r_x^2)} = r_x, \text{ da } r_y^2 + r_x^2 = 1$$

Damit wird  $z = \sin \alpha \cdot n_x$

$$\vec{p}_y = r_y \vec{r}^0 + \cos \alpha \cdot r_y \vec{e}_y = \begin{pmatrix} r_x \cdot r_y \\ r_y^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \alpha \cdot \begin{pmatrix} -r_x \cdot r_y \\ r_x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \cdot r_y + \cos \alpha \cdot (-r_x \cdot r_y) \\ r_y^2 + \cos \alpha \cdot r_x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit  $r_y^2 = 1 - r_x^2$  folgt

$$\vec{p}_y = \begin{pmatrix} r_x \cdot r_y + \cos \alpha \cdot (-r_x \cdot r_y) \\ r_y^2 + \cos \alpha \cdot r_x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \cdot r_y + \cos \alpha \cdot (-r_x \cdot r_y) \\ r_y^2 + \cos \alpha \cdot (1 - r_y^2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \cdot r_y \cdot (1 - \cos \alpha) \\ r_y^2 + \cos \alpha - \cos \alpha \cdot r_y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_y = \begin{pmatrix} r_x \cdot r_y \cdot (1 - \cos \alpha) \\ (1 - \cos \alpha) \cdot r_y^2 + \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, der Einheitsvektor  $\vec{e}_y$  wird durch die Drehung auf den Vektor  $\vec{e}_y'$  abgebildet.

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}_y' = \begin{pmatrix} (1 - \cos \alpha) \cdot r_x \cdot r_y \\ (1 - \cos \alpha) \cdot r_y^2 + \cos \alpha \\ \sin \alpha \cdot r_x \end{pmatrix}$$

**Drehung des Einheitsvektors  $\vec{e}_z$  um  $r^0$  um den Winkel  $\alpha$  :**

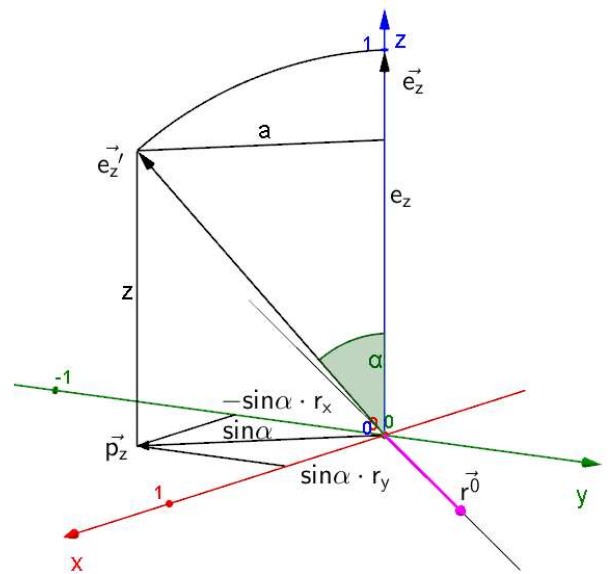
$$a = \sin \alpha$$

$$z = \cos \alpha$$

$$\vec{p}_z = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cdot r_y \\ -\sin \alpha \cdot r_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, der Einheitsvektor  $\vec{e}_z$  wird durch die Drehung auf den Vektor  $\vec{e}_z'$  abgebildet.

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e}_z' = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cdot r_y \\ -\sin \alpha \cdot r_x \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$



Damit ergibt sich die Drehmatrix

$$\Rightarrow R_{\alpha, r^0} = \begin{pmatrix} (1 - \cos \alpha) \cdot r_x^2 + \cos \alpha & (1 - \cos \alpha) \cdot r_x \cdot r_y & \sin \alpha \cdot r_y \\ (1 - \cos \alpha) \cdot r_y \cdot r_x & (1 - \cos \alpha) \cdot r_y^2 + \cos \alpha & -\sin \alpha \cdot r_x \\ -\sin \alpha \cdot r_y & \sin \alpha \cdot r_x & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

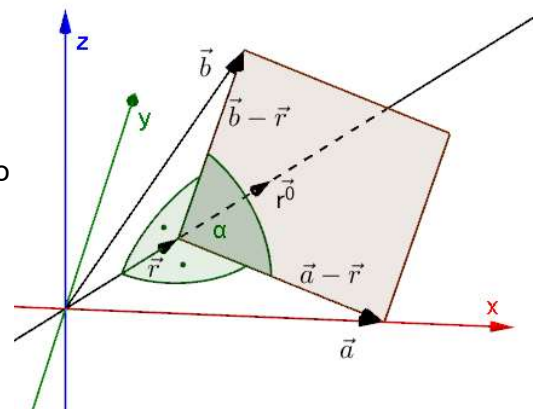
**Fakultativ: Drehung um Ursprungsgerade mit dem Richtungsvektor  $r^0 = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$**

Drehung des Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  um den Winkel  $\alpha$

auf den Vektor  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ , da  $|\vec{a}| = 1$  ist auch  $|\vec{b}| = 1$ , also

$$b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 = 1, \text{ was später benötigt wird.}$$

$$\vec{r} = \left( \vec{a} \cdot \vec{r}^0 \right) \cdot \vec{r}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = r_x \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x^2 \\ r_x \cdot r_y \\ r_x \cdot r_z \end{pmatrix}$$



ist der Projektionsvektor von  $\vec{a}$  auf  $r^0$  mit der Richtung von  $r^0$ .

Die Differenzvektoren  $\vec{a} - \vec{r}$  und  $\vec{b} - \vec{r}$  stehen senkrecht auf dem Vektor  $r^0$ , damit lässt sich der durch das Kreuzprodukt  $(\vec{a} - \vec{r}) \times (\vec{b} - \vec{r})$  entstehende Vektor in der folgenden Form

schreiben,  $(\vec{a} - \vec{r}) \times (\vec{b} - \vec{r}) = |\vec{a} - \vec{r}| \cdot |\vec{b} - \vec{r}| \cdot \sin \alpha \cdot r^0$ , da  $|\vec{a} - \vec{r}| \cdot |\vec{b} - \vec{r}| \cdot \sin \alpha$  der von den

Vektoren  $\vec{a}-\vec{r}$  und  $\vec{b}-\vec{r}$  aufgespannten Fläche und damit der Länge des durch das Kreuzprodukt entstandenen Vektors entspricht, mit der Richtung von  $\vec{r}^0$ .

Da  $|\vec{a}-\vec{r}| = |\vec{b}-\vec{r}|$  folgt,  $(\vec{a}-\vec{r}) \times (\vec{b}-\vec{r}) = |\vec{a}-\vec{r}|^2 \cdot \sin \alpha \cdot \vec{r}^0$ .

Setzt man nun für  $\vec{a}$ ,  $\vec{r}$  und  $\vec{r}^0$  ein, erhält man

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_x^2 \\ r_x \cdot r_y \\ r_x \cdot r_z \end{pmatrix} \right) \times \left( \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_x^2 \\ r_x \cdot r_y \\ r_x \cdot r_z \end{pmatrix} \right) = \left( (1-r_x^2)^2 + r_x^2 \cdot r_y^2 + r_x^2 \cdot r_z^2 \right) \cdot \sin \alpha \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassen liefert

$$\begin{pmatrix} 1-r_x^2 \\ -r_x \cdot r_y \\ -r_x \cdot r_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x - r_x^2 \\ b_y - r_x \cdot r_y \\ b_z - r_x \cdot r_z \end{pmatrix} = (1-2r_x^2 + r_x^4 + r_x^2 \cdot r_y^2 + r_x^2 \cdot r_z^2) \cdot \sin \alpha \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -r_x \cdot r_y \cdot (b_z - r_x \cdot r_z) + r_x \cdot r_z \cdot (b_y - r_x \cdot r_y) \\ -r_x \cdot r_z \cdot (b_x - r_x^2) - (1-r_x^2) \cdot (b_z - r_x \cdot r_z) \\ (1-r_x^2) \cdot (b_y - r_x \cdot r_y) + r_x \cdot r_y \cdot (b_x - r_x^2) \end{pmatrix} = (1-2r_x^2 + r_x^2 (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)) \cdot \sin \alpha \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}.$$

mit  $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$  folgt

$$\begin{pmatrix} -r_x \cdot r_y \cdot (b_z - r_x \cdot r_z) + r_x \cdot r_z \cdot (b_y - r_x \cdot r_y) \\ -r_x \cdot r_z \cdot (b_x - r_x^2) - (1-r_x^2) \cdot (b_z - r_x \cdot r_z) \\ (1-r_x^2) \cdot (b_y - r_x \cdot r_y) + r_x \cdot r_y \cdot (b_x - r_x^2) \end{pmatrix} = (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix},$$

was man auch koordinatenweise schreiben kann.

x-Koordinate:  $-r_x \cdot r_y \cdot (b_z - r_x \cdot r_z) + r_x \cdot r_z \cdot (b_y - r_x \cdot r_y) = (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_x$

y-Koordinate:  $-r_x \cdot r_z \cdot (b_x - r_x^2) - (1-r_x^2) \cdot (b_z - r_x \cdot r_z) = (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_y$

z-Koordinate:  $(1-r_x^2) \cdot (b_y - r_x \cdot r_y) + r_x \cdot r_y \cdot (b_x - r_x^2) = (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_z$

y- und z-Koordinate werden nun umgeformt und in  $b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 = 1$  eingesetzt, um  $b_x$  zu bestimmen.

y-Koordinate:

$$-r_x \cdot r_z \cdot (b_x - r_x^2) - (1-r_x^2) \cdot (b_z - r_x \cdot r_z) = (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_y$$

$$(1-r_x^2) \cdot (b_z - r_x \cdot r_z) = -r_x \cdot r_z \cdot (b_x - r_x^2) - (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_y$$

$$(1-r_x^2) \cdot b_z - (1-r_x^2) \cdot r_x \cdot r_z = -r_x \cdot r_z \cdot (b_x - r_x^2) - (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_y$$

$$(1-r_x^2) \cdot b_z = (1-r_x^2) \cdot r_x \cdot r_z - r_x \cdot r_z \cdot (b_x - r_x^2) - (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_y$$

$$(1-r_x^2) \cdot b_z = r_x \cdot r_z \cdot (1-r_x^2 - b_x + r_x^2) - (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_y$$

$$(1-r_x^2) \cdot b_z = r_x \cdot r_z \cdot (1-b_x) - (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_y$$

man quadriert, um gleich besser einsetzen zu können

$$(1-r_x^2)^2 \cdot b_z^2 = (r_x \cdot r_z \cdot (1-b_x) - (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_y)^2$$

z-Koordinate:

$$(1-r_x^2) \cdot (b_y - r_x \cdot r_y) + r_x \cdot r_y \cdot (b_x - r_x^2) = (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_z$$

$$(1-r_x^2) \cdot (b_y - r_x \cdot r_y) = -r_x \cdot r_y \cdot (b_x - r_x^2) + (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_z$$

$$(1-r_x^2) \cdot b_y - r_x \cdot r_y \cdot (1-r_x^2) = -r_x \cdot r_y \cdot (b_x - r_x^2) + (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_z$$

$$(1-r_x^2) \cdot b_y = r_x \cdot r_y \cdot (1-r_x^2 - b_x + r_x^2) + (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_z$$

$$(1-r_x^2) \cdot b_y = r_x \cdot r_y \cdot (1-b_x) + (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_z$$

auch hier wird wieder quadriert

$$(1-r_x^2)^2 \cdot b_y^2 = (r_x \cdot r_y \cdot (1-b_x) + (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_z)^2$$

mit  $b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 = 1$  gilt auch  $(1-r_x^2)^2 \cdot b_x^2 + (1-r_x^2)^2 \cdot b_y^2 + (1-r_x^2)^2 \cdot b_z^2 = (1-r_x^2)^2$

durch Einsetzen erhält man

$$(1-r_x^2)^2 \cdot b_x^2 + (1-r_x^2)^2 \cdot b_y^2 + (1-r_x^2)^2 \cdot b_z^2 = (1-r_x^2)^2$$

$$(1-r_x^2)^2 \cdot b_x^2 + (r_x \cdot r_y \cdot (1-b_x) + (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_z)^2 + (r_x \cdot r_z \cdot (1-b_x) - (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_y)^2 = (1-r_x^2)^2$$

$$(1-r_x^2)^2 \cdot b_x^2 + r_x^2 \cdot r_y^2 \cdot (1-b_x)^2 + 2r_x \cdot r_y \cdot (1-b_x) \cdot (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_z + (1-r_x^2)^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot r_z^2$$

$$+ r_x^2 \cdot r_z^2 \cdot (1-b_x)^2 - 2r_x \cdot r_z \cdot (1-b_x) \cdot (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_y + (1-r_x^2)^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot r_y^2 = (1-r_x^2)^2$$

$$(1-r_x^2)^2 \cdot b_x^2 + r_x^2 \cdot r_y^2 \cdot (1-b_x)^2 + (1-r_x^2)^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot r_z^2 + r_x^2 \cdot r_z^2 \cdot (1-b_x)^2 + (1-r_x^2)^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot r_y^2 = (1-r_x^2)^2$$

$$(1-r_x^2)^2 \cdot b_x^2 + r_x^2 \cdot (1-b_x)^2 \cdot (r_z^2 + r_y^2) + (1-r_x^2)^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot (r_z^2 + r_y^2) = (1-r_x^2)^2$$

mit  $r_z^2 + r_y^2 = 1-r_x^2$

$$(1-r_x^2)^2 \cdot b_x^2 + r_x^2 \cdot (1-b_x)^2 \cdot (1-r_x^2) + (1-r_x^2)^2 \cdot \sin^2 \alpha = (1-r_x^2)^2$$

$$(1-r_x^2) \cdot b_x^2 + r_x^2 \cdot (1-b_x)^2 + (1-r_x^2) \cdot \sin^2 \alpha = 1-r_x^2$$

$$b_x^2 - r_x^2 \cdot b_x^2 + r_x^2 - 2r_x^2 \cdot b_x + r_x^2 \cdot b_x^2 + (1-r_x^2) \cdot \sin^2 \alpha = 1-r_x^2$$

$$b_x^2 - 2r_x^2 \cdot b_x + (1-r_x^2) \cdot \sin^2 \alpha - 1 + 2r_x^2 = 0$$

$$b_{x1/2} = r_x^2 \pm \sqrt{r_x^4 - \left( (1-r_x^2) \cdot \sin^2 \alpha - 1 + 2r_x^2 \right)}$$

$$b_{x1/2} = r_x^2 \pm \sqrt{r_x^4 - (1-r_x^2)^2 \cdot \sin^2 \alpha + 1 - 2r_x^2}$$

$$b_{x1/2} = r_x^2 \pm \sqrt{r_x^4 - 2r_x^2 + 1 - (1-r_x^2)^2 \cdot \sin^2 \alpha}$$

$$b_{x1/2} = r_x^2 \pm \sqrt{(1-r_x^2)^2 - (1-r_x^2)^2 \cdot \sin^2 \alpha}$$

$$b_{x1/2} = r_x^2 \pm \sqrt{(1-r_x^2)^2 (1-\sin^2 \alpha)}$$

$$b_{x1/2} = r_x^2 \pm (1-r_x^2) \sqrt{1-\sin^2 \alpha} \quad , \quad \text{mit } \sqrt{1-\sin^2 \alpha} = \cos \alpha$$

$$b_{x1/2} = r_x^2 \pm (1-r_x^2) \cos \alpha$$

Fallunterscheidung:  $\alpha = 0$  , also keine Drehung

$\Rightarrow b_{x1} = r_x^2 - (1-r_x^2) = r_x^2 - 1 + r_x^2 = 2r_x^2 - 1$  , Widerspruch, da die x-Koordinate des nicht gedrehten Vektors  $\vec{a}$  gleich 1 sein müsste.

$\Rightarrow b_{x2} = r_x^2 + (1-r_x^2) = r_x^2 + 1 - r_x^2 = 1$  , ist die richtige Lösung.

$$\boxed{b_x = r_x^2 + (1-r_x^2) \cos \alpha = r_x^2 \cdot (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha}$$

$$b_x = r_x^2 + (1-r_x^2) \cos \alpha \quad \text{einsetzen in } (1-r_x^2) \cdot b_y = r_x \cdot r_y \cdot (1-b_x) + (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_z$$

$$(1-r_x^2) \cdot b_y = r_x \cdot r_y \cdot (1-r_x^2 - (1-r_x^2) \cos \alpha) + (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_z$$

$$(1-r_x^2) \cdot b_y = r_x \cdot r_y \cdot (1-r_x^2) \cdot (1 - \cos \alpha) + (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_z$$

$$\boxed{b_y = r_x \cdot r_y \cdot (1 - \cos \alpha) + \sin \alpha \cdot r_z}$$

$$b_x = r_x^2 + (1-r_x^2) \cos \alpha \quad \text{einsetzen in } (1-r_x^2) \cdot b_z = r_x \cdot r_z \cdot (1-b_x) - (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_y$$

$$(1-r_x^2) \cdot b_z = r_x \cdot r_z \cdot (1-r_x^2 - (1-r_x^2) \cos \alpha) - (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_y$$

$$(1-r_x^2) \cdot b_z = r_x \cdot r_z \cdot (1-r_x^2) \cdot (1 - \cos \alpha) - (1-r_x^2) \cdot \sin \alpha \cdot r_y$$

$$\boxed{b_z = r_x \cdot r_z \cdot (1 - \cos \alpha) - \sin \alpha \cdot r_y}$$

Der Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  wird also um den Winkel  $\alpha$  auf den Vektor

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} r_x^2 \cdot (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \\ r_x \cdot r_y \cdot (1 - \cos \alpha) + \sin \alpha \cdot r_z \\ r_x \cdot r_z \cdot (1 - \cos \alpha) - \sin \alpha \cdot r_y \end{pmatrix} \text{ gedreht.}$$

damit erhält man für die Drehmatrix

$$R_{\alpha, r^0} = \begin{pmatrix} r_x^2 \cdot (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & ? & ? \\ r_y r_x (1 - \cos \alpha) + r_z \sin \alpha & ? & ? \\ r_z r_x (1 - \cos \alpha) - r_y \sin \alpha & ? & ? \end{pmatrix}$$

die beiden anderen Spalten erhält man durch weitere Rechnung, oder durch zyklisches Vertauschen ( $x-y-z \rightarrow y-z-x \rightarrow z-x-y$ ).

$$R_{\alpha, r^0} = \begin{pmatrix} r_x^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & r_x r_y (1 - \cos \alpha) - r_z \sin \alpha & r_x r_z (1 - \cos \alpha) + r_y \sin \alpha \\ r_y r_x (1 - \cos \alpha) + r_z \sin \alpha & r_y^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha & r_y r_z (1 - \cos \alpha) - r_x \sin \alpha \\ r_z r_x (1 - \cos \alpha) - r_y \sin \alpha & r_z r_y (1 - \cos \alpha) + r_x \sin \alpha & r_z^2 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha \end{pmatrix}$$

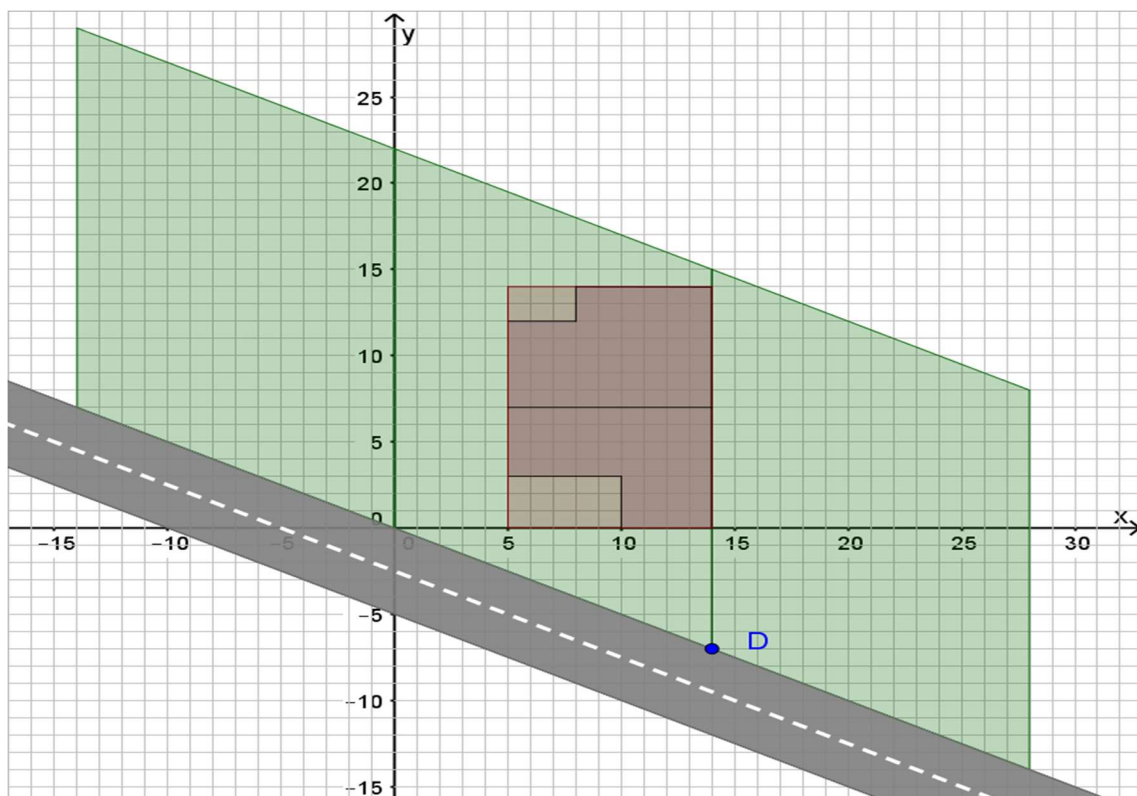
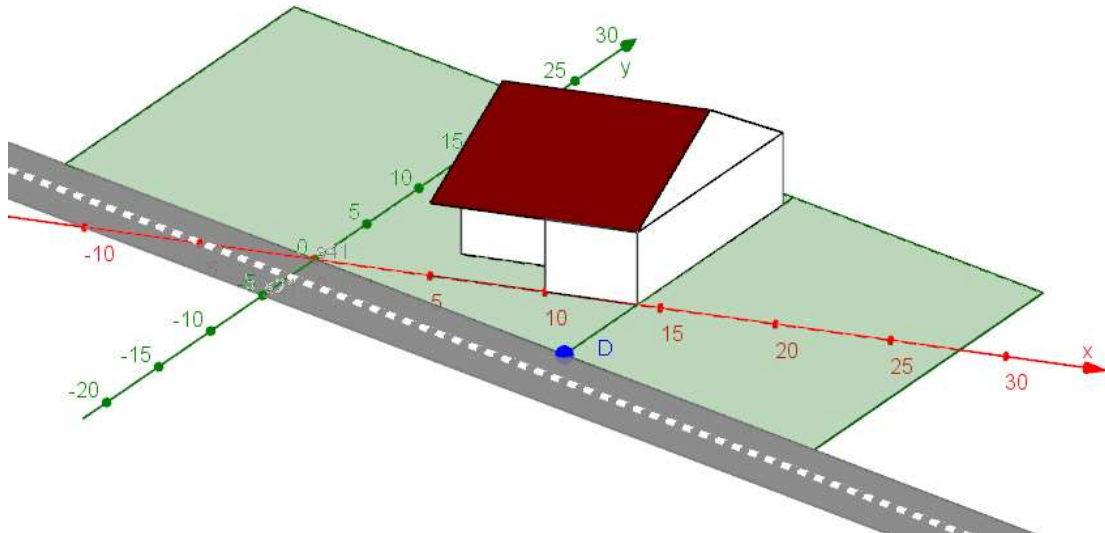
# Lernsituationen

## LS Bebauung

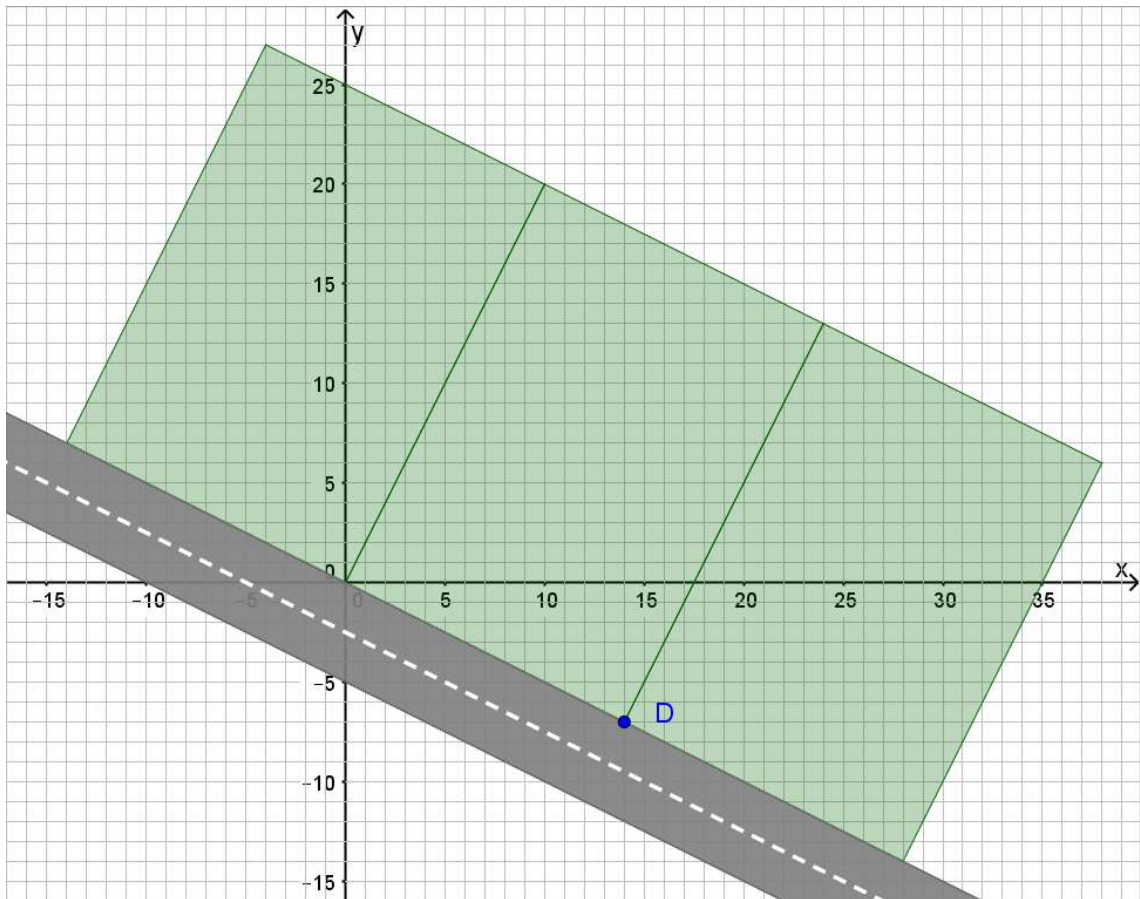
| Lernsituationen Mathematik  |  |   |  |  |   |   |                  |   |   |   |   |   |
|---|--|---|--|--|---|---|------------------|---|---|---|---|---|
| <b>LS</b> Änderung eines Bebauungsplans<br>Drehung und Spiegelung des Grundrisses   |  |   |  |  |   |   | <b>Zeit:</b> 4 h |   |   |   |   |   |
| Schulform/curriculare Vorgaben: BG<br>KC-GO   |  |   |  |  |   |   |                  |   |   |   |   |   |
| <b>Vorkenntnisse</b><br>Vektoren, Geradengleichung in vektorieller Form<br>Matrizen<br><b>Inhaltsbezogene Kompetenzen</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Verschiebungen</li> <li>• Rotationsmatrizen</li> <li>• Spiegelmatrizen</li> <li>•</li> </ul> |  |   |  |  | <b>Prozessbezogene Kompetenzen</b>                      |   |                  |   |   |   |   |   |
|   |  |   |  |  | <b>MA</b>   | 1 | 2                | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|   |  |   |  |  | <b>PL</b>   | 1 | 2                | 3 | 4 | 5 | 6 |   |
|   |  |   |  |  | <b>MM</b>   | 1 | 2                | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|   |  |   |  |  | <b>MD</b>   | 1 | 2                | 3 | 4 | 5 |   |   |
|   |  |   |  |  | <b>SFT</b>  | 1 | 2                | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|   |  |   |  |  | <b>K</b>  | 1 | 2                | 3 | 4 | 5 | 6 |   |
|   |  |   |  |  | <b>Methodenkompetenz</b><br>Partner- oder Gruppenarbeit |   |                  |   |   |   |   |   |
| <b>Medien:</b> Tafel, Beamer, PC, GeoGebra, Planungsentwurf   |  |   |  |  |   |   |                  |   |   |   |   |   |
| <b>Zeit</b>   | <b>Verlauf</b>   |   |  |  |   |   |                  |   |   |   |   |   |
| 4   | <b>Handlungssituation:</b><br>Erstellung eines Gebäudegrundrisses aufgrund von Änderungen im Bebauungsplan |   |  |  |   |   |                  |   |   |   |   |   |
|   | <b>Vollständige Handlung</b>   |   |  |  |   |   |                  |   |   |   |   |   |
|   | Informieren  | Planungsentwurf und Koordinaten der Eckpunkte   |  |  |   |   |                  |   |   |   |   |   |
|   | Planen   | Verschiebung, Drehwinkel, Rotationsmatrix, Spiegelgerade und Spiegelmatrix<br>Skizze des neuen Gebäudegrundrisses   |  |  |   |   |                  |   |   |   |   |   |
|   | Entscheiden  |   |  |  |   |   |                  |   |   |   |   |   |
|   | Durchführen  | Berechnung des Drehwinkels<br>Aufstellen der Rotationsmatrix<br>Berechnung der um $D$ gedrehten Eckpunkte<br>Berechnung der Steigung der Spiegelgeraden<br>Aufstellen der Spiegelmatrix<br>Berechnung der an der Spiegelgeraden gespiegelten Eckpunkte<br>Erstellung des Gebäudegrundrisses |  |  |   |   |                  |   |   |   |   |   |
|   | Kontrollieren  | Plausibilitätskontrolle, Vergleich von Rechenergebnissen mit der Skizze des Gebäudegrundrisses  |  |  |   |   |                  |   |   |   |   |   |
|   | Reflektieren   | spezielle und allgemeine Form von Rotations- und Spiegelmatrix  |  |  |   |   |                  |   |   |   |   |   |
|   | <b>Handlungsergebnis:</b><br>Neuer Gebäudegrundrisses  |   |  |  |   |   |                  |   |   |   |   |   |
|   | <b>Erweiterungen</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>•</li> </ul>                                   |   |  |  |   |   |                  |   |   |   |   |   |
| <b>Leistungsbewertung</b><br>Darstellung des Gebäudegrundrisses, Dokumentation der Berechnungen   |  |   |  |  |   |   |                  |   |   |   |   |   |

## Änderung eines Bebauungsplans

Ein Neubaugebiet soll mit Einfamilienhäusern und Doppelhaushälften bebaut werden. Ein erster Planungsentwurf sieht eine Grundstücksauslegung mit Bebauung einer Doppelhaushälfte gemäß nachfolgende Abbildungen vor.



Nach einem Anhörungsverfahren wird eine Umplanung notwendig, da sich Grundstücksauslegung, wie nachfolgend abgebildet, geändert hat.

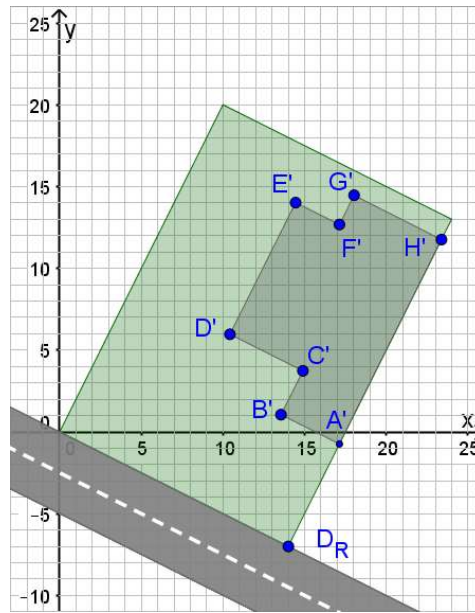
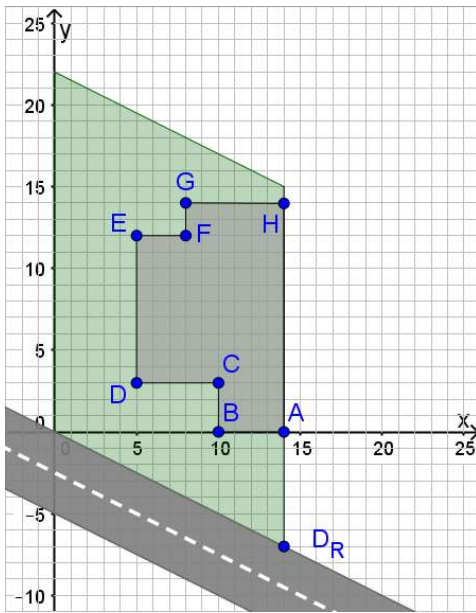


Durch die neue Grundstücksauslegung wird nun ebenfalls eine Änderung des Gebäudegrundrisses notwendig.  
 Zeichnen Sie den neuen Gebäudegrundriss, wenn der vorhandene so um den Punkt D gedreht wird, dass der neue Grundriss wieder mit der Grundstücksgrenze abschließt.  
 Berechnen Sie die neuen Eckpunkte des Grundrisses.

Die Planung sieht für das rechte Nachbargrundstück ebenfalls eine Doppelhaushälfte vor, die spiegelbildlich zur abgebildeten Doppelhaushälfte errichtet werden soll, wobei die Grundstücksgrenze die Spiegelachse bildet.  
 Berechnen Sie die Eckpunkte des zweiten Grundrisses und ergänzen Sie die Zeichnung.



## Erwartungshorizont



Drehung um Punkt  $D_R$  mit dem Winkel  $\alpha = \arctan\left(\frac{14}{-7}\right) = -26,57^\circ$

$$\text{Drehmatrix: } R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix}$$

Drehung der Punkt  $A, \dots, H$  gemäß  $\vec{P}' = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot (\vec{P} - \vec{D}_R) + \vec{D}_R$

$$\vec{A}' = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot (\vec{A} - \vec{D}_R) + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17,13 \\ -0,74 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}' = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot (\vec{B} - \vec{D}_R) + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,55 \\ 1,05 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C}' = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot (\vec{C} - \vec{D}_R) + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14,89 \\ 3,73 \end{pmatrix}$$

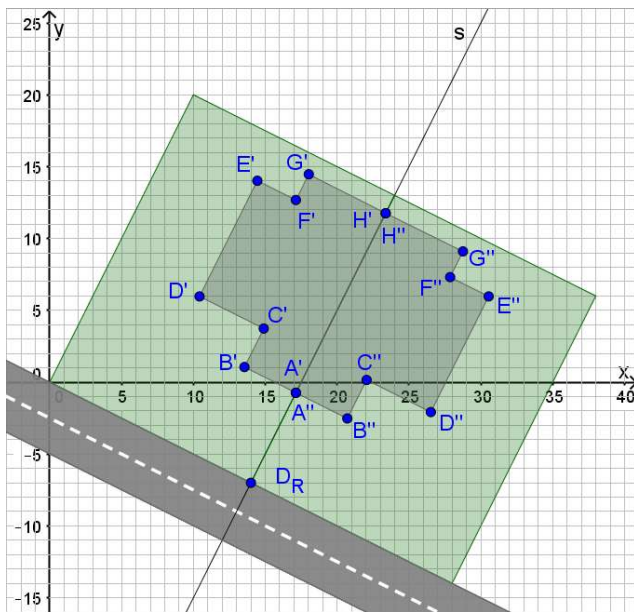
$$\vec{D}' = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot (\vec{D} - \vec{D}_R) + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,42 \\ 5,97 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}' = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot (\vec{E} - \vec{D}_R) + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14,45 \\ 14,02 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}' = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot (\vec{F} - \vec{D}_R) + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17,13 \\ 12,68 \end{pmatrix}$$

$$\vec{G}' = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot (\vec{G} - \vec{D}_R) + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18,02 \\ 14,47 \end{pmatrix}$$

$$\vec{H}' = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot (\vec{H} - \vec{D}_R) + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} 0,894 & 0,447 \\ -0,447 & 0,894 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23,39 \\ 11,78 \end{pmatrix}$$



Spiegelung an der Geraden  $s$  mit dem Steigungswinkel  $\alpha = 63,43^\circ$

$$\text{Spiegelmatrix: } S = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spiegelung der Punkt } A', \dots, H' \text{ gemäß } \vec{P}'' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{P}' - \vec{D}_R \\ \vec{P}' - \vec{D}_R \end{pmatrix} + \vec{D}_R$$

$$\vec{A}'' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{A}' - \vec{D}_R \\ \vec{A}' - \vec{D}_R \end{pmatrix} + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,12 \\ 6,26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17,13 \\ -0,74 \end{pmatrix} = \vec{A}'$$

$$\vec{B}'' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{B}' - \vec{D}_R \\ \vec{B}' - \vec{D}_R \end{pmatrix} + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,45 \\ 8,05 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20,71 \\ -2,53 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C}'' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{C}' - \vec{D}_R \\ \vec{C}' - \vec{D}_R \end{pmatrix} + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,89 \\ 10,73 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22,05 \\ 0,15 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}'' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{D}' - \vec{D}_R \\ \vec{D}' - \vec{D}_R \end{pmatrix} + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3,58 \\ 12,97 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26,52 \\ -2,08 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}'' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{E}' - \vec{D}_R \\ \vec{E}' - \vec{D}_R \end{pmatrix} + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,45 \\ 21,02 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30,55 \\ 5,97 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}'' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{F}' - \vec{D}_R \\ \vec{F}' - \vec{D}_R \end{pmatrix} + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,13 \\ 19,68 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27,87 \\ 7,31 \end{pmatrix}$$

$$\vec{G}'' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{G}' - \vec{D}_R \\ \vec{G}' - \vec{D}_R \end{pmatrix} + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4,02 \\ 21,47 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28,76 \\ 9,10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{H}'' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{H}' - \vec{D}_R \\ \vec{H}' - \vec{D}_R \end{pmatrix} + \vec{D}_R = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9,39 \\ 18,78 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23,39 \\ 11,78 \end{pmatrix} = \vec{H}'$$

## LS Windkraftanlage

| Lernsituationen Mathematik   |  |   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
|--|--|---|---|--------|---|-------------|--|-------------|---|---------------|---|--------------|---|---|---|---|--|-----------|---|---|---|---|---|---|---|-----------|---|---|---|---|---|--|--|------------|---|---|---|---|---|---|---|----------|---|---|---|---|---|---|--|--|
| <b>LS Schattenwurf einer Windenergieanlage WEA</b><br>Überprüfung des Bebauungsabstandes zu einer WEA  | <b>Zeit: 4 h</b>   |   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
| <b>Schulform/curriculare Vorgaben:</b> BG<br>KC-GO   |  |   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
| <b>Vorkenntnisse</b><br>Vektoren, Geradengleichung in vektorieller Form<br>Matrizen<br><b>Inhaltsbezogene Kompetenzen</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Rotationsmatrizen</li> <li>• Abbildungsmatrizen</li> <li>• Programmierung</li> <li>•</li> </ul> | <b>Prozessbezogene Kompetenzen</b>   |   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
|  | <table border="1"> <tr> <td><b>MA</b></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td><b>PL</b></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td></td> </tr> <tr> <td><b>MM</b></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td><b>MD</b></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td><b>SFT</b></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td><b>K</b></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td></td> </tr> </table>  | <b>MA</b>   | 1   | 2      | 3   | 4           | 5  | 6           | 7   | <b>PL</b>     | 1   | 2            | 3   | 4 | 5 | 6 |  | <b>MM</b> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | <b>MD</b> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |  |  | <b>SFT</b> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | <b>K</b> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |  |  |
|  | <b>MA</b>  | 1   | 2   | 3      | 4   | 5           | 6  | 7           |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
|  | <b>PL</b>  | 1   | 2   | 3      | 4   | 5           | 6  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
|  | <b>MM</b>  | 1   | 2   | 3      | 4   | 5           | 6  | 7           |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
|  | <b>MD</b>  | 1   | 2   | 3      | 4   | 5           |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
|  | <b>SFT</b>   | 1   | 2   | 3      | 4   | 5           | 6  | 7           |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
| <b>K</b>   | 1  | 2   | 3   | 4      | 5   | 6           |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
| <b>Methodenkompetenz</b><br>Partner- oder Gruppenarbeit  |  |   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
| <b>Medien:</b> Tafel, Beamer, PC, GeoGebra, Planungsskizze   |  |   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
| <b>Zeit</b>  | <b>Verlauf</b>   |   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
| { }  | <b>Handlungssituation:</b><br>Überprüfung des Bebauungsabstandes zu einer WEA, Kennzeichnung des Schattenbereiches   |   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
|  | <b>Vollständige Handlung</b>   |   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
|  | <table border="1"> <tr> <td>Informieren</td> <td>Lageplan mit WEA und Bebauung, Standort und Höhe der WEA, Richtung der Sonnenstrahlen</td> </tr> <tr> <td>Planen</td> <td>Windrichtung, Rotationsmatrix, Abbildungsmatrix</td> </tr> <tr> <td>Entscheiden</td> <td>Anzahl der Schattenpunkte, Festlegung des Vektors, der die Flügelspitze beschreibt</td> </tr> <tr> <td>Durchführen</td> <td>Aufstellen der Rotationsmatrix R und der Abbildungsmatrix P, Drehung der Flügelspitze um R, Verschiebung in die Narbenposition, Aufstellen der Geradengleichung mit Flügelspitze und Richtung der Sonnenstrahlen, Berechnung des Schattenpunktes auf dem Boden, Abbildung des Schattenpunktes mit P in der Planungsskizze</td> </tr> <tr> <td>Kontrollieren</td> <td>Plausibilitätskontrolle, Vergleich von Rechenergebnissen mit der Planungsskizze</td> </tr> <tr> <td>Reflektieren</td> <td>spezielle und allgemeine Form von Rotations- und Abbildungsmatrix</td> </tr> </table> | Informieren   | Lageplan mit WEA und Bebauung, Standort und Höhe der WEA, Richtung der Sonnenstrahlen | Planen | Windrichtung, Rotationsmatrix, Abbildungsmatrix | Entscheiden | Anzahl der Schattenpunkte, Festlegung des Vektors, der die Flügelspitze beschreibt | Durchführen | Aufstellen der Rotationsmatrix R und der Abbildungsmatrix P, Drehung der Flügelspitze um R, Verschiebung in die Narbenposition, Aufstellen der Geradengleichung mit Flügelspitze und Richtung der Sonnenstrahlen, Berechnung des Schattenpunktes auf dem Boden, Abbildung des Schattenpunktes mit P in der Planungsskizze | Kontrollieren | Plausibilitätskontrolle, Vergleich von Rechenergebnissen mit der Planungsskizze | Reflektieren | spezielle und allgemeine Form von Rotations- und Abbildungsmatrix |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
|  | Informieren  | Lageplan mit WEA und Bebauung, Standort und Höhe der WEA, Richtung der Sonnenstrahlen   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
|  | Planen   | Windrichtung, Rotationsmatrix, Abbildungsmatrix   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
|  | Entscheiden  | Anzahl der Schattenpunkte, Festlegung des Vektors, der die Flügelspitze beschreibt  |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
|  | Durchführen  | Aufstellen der Rotationsmatrix R und der Abbildungsmatrix P, Drehung der Flügelspitze um R, Verschiebung in die Narbenposition, Aufstellen der Geradengleichung mit Flügelspitze und Richtung der Sonnenstrahlen, Berechnung des Schattenpunktes auf dem Boden, Abbildung des Schattenpunktes mit P in der Planungsskizze |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
|  | Kontrollieren  | Plausibilitätskontrolle, Vergleich von Rechenergebnissen mit der Planungsskizze   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
| Reflektieren   | spezielle und allgemeine Form von Rotations- und Abbildungsmatrix  |   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
| <b>Handlungsergebnis:</b><br>maximaler Bebauungsabstand, Beurteilung der vorläufigen Planungen   |  |   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
| { }  | <b>Erweiterungen</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Programmierung des digitalen Mathematikwerkzeugs</li> <li>• Variation der Rotationsachsenrichtung</li> <li>• Variation der Lage des Koordinatensystems in der Planungsskizze</li> </ul>  |   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
|  | <b>Leistungsbewertung</b>  |   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |
|  | Darstellung der überstrichenen Fläche in der Planungsskizze, Dokumentation der Berechnungen  |   |   |        |   |             |  |             |   |               |   |              |   |   |   |   |  |           |   |   |   |   |   |   |   |           |   |   |   |   |   |  |  |            |   |   |   |   |   |   |   |          |   |   |   |   |   |   |  |  |

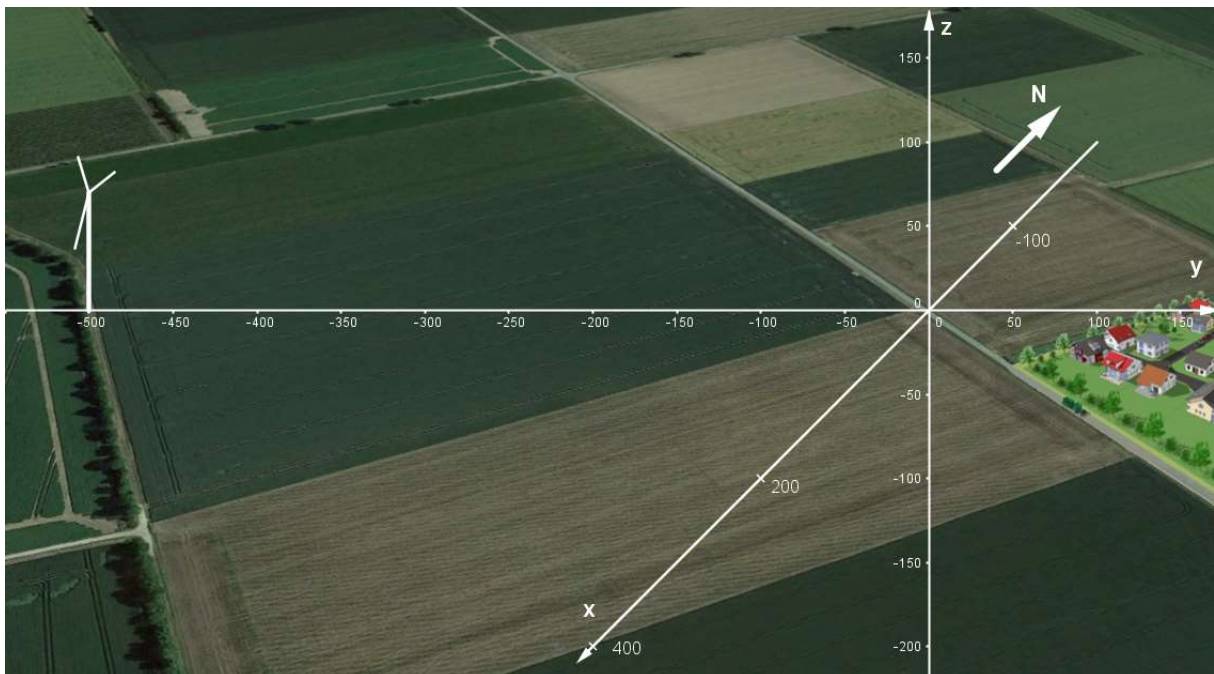
## Überprüfung des Bbauungsabstandes zu einer Windenergieanlage WEA

In der Nähe eines Neubaugebietes soll eine WEA errichtet werden. Die Anwohner befürchten, dass, neben der Lärmbelästigung durch die Anlage, auch der besonders in den Abendstunden und im Winter aufgrund der tiefstehenden Sonne auftretende Schattenwurf die Wohnqualität erheblich mindern könnte.

Sie werden aufgefordert zu prüfen, ob der Abstand der WEA zum Neubaugebiet ausreichend gewählt wurde und andernfalls geeignete Vorschläge zu unterbreiten, um sowohl die Interessen der WEA-Betreiber, als auch die der Anwohner zu berücksichtigen.

Für mögliche spätere Erweiterungen des Baugebietes soll zudem ein Bereich in die Planungsskizze eingezeichnet werden, der aufgrund des Schattenwurfes nicht bebaut werden darf.

Aufgrund der Planungen liegen folgende Fakten vor (siehe Planungsskizze):



Planungsskizze

Daten der WEA

WEA-Masthöhe: 70 m  
WEA-Flügelänge: 30 m

Kurz bevor die Sonne im Westen hinter einem Höhenzug untergeht, scheint sie aus

$$\text{Richtung } \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Für die Windrichtung wird W (West) angenommen.

## Erwartungshorizont

### Abstand zum Neubaugebiet

Aufstellen der Geradengleichung, die den Schattenwurf beschreibt. Stützvektor ist der Ortsvektor zur senkrecht über dem Mast stehenden Flügelspitze, Richtungsvektor ist  $\vec{s}$ .

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -500 \\ 100 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dort, wo z-Koordinate von  $\vec{x}$  gleich Null ist, befindet sich der Schatten der Flügelspitze.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -500 \\ 100 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 50 \cdot 2 = 100 \\ y = -500 + 50 \cdot 13 = 150 \\ 0 = 100 - 2\lambda \Rightarrow \lambda = 50 \end{array}$$

Der Schattenpunkt der Flügelspitze befindet sich bei  $S(100 | 150 | 0)$ .

Der Punkt S berührt dabei die Grundstücke nur knapp, so dass der Bebauungsplan nicht geändert werden muss.

Will man ggf. spätere Klagen vermeiden, sollte man entweder die Entfernung zwischen WEA und Neubaugebiet vergrößern, oder die Höhe der Anlage reduzieren (wegen der dann schlechteren Windausbeute ist die andere Alternative vorzuziehen).

### Bereich des Schattenwurfes

Zunächst wird ein Punkt definiert, der vom Ursprung einen Abstand hat, der der Flügellänge entspricht. Da sich der Rotor der WEA um die y-Achse dreht, muss der Punkt in der yz-Ebenen liegen.

$$\text{z.B.: } F(30 | 0 | 0)$$

dieser Punkt wird nun mit einer Rotationsmatrix  $R_{\alpha,y} = R$  bzgl. der y-Achse um den Winkel  $\alpha$  um den Ursprung gedreht.

$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$F_{\alpha}^1 = R \cdot F = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \cdot \cos \alpha \\ 0 \\ -30 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

der gedrehte Punkt  $F_{\alpha}^1$  wird anschließend so verschoben, dass der Ursprung in der Narbe der WEA liegt.

$$F_{\alpha}^2 = R \cdot F + \begin{pmatrix} 0 \\ -500 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \cdot \cos \alpha \\ 0 \\ -30 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -500 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \cdot \cos \alpha \\ -500 \\ -30 \cdot \sin \alpha + 70 \end{pmatrix}$$

Nun wird der Schattenwurf des Punktes  $F_{\alpha}^2$  auf den Boden berechnet (s.o.)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \cdot \cos \alpha \\ -500 \\ -30 \cdot \sin \alpha + 70 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 30 \cdot \cos \alpha + (-15 \cdot \sin \alpha + 35) \cdot 2 = 30 \cdot \cos \alpha - 30 \cdot \sin \alpha + 70 \\ y &= -500 + (-15 \cdot \sin \alpha + 35) \cdot 13 = -195 \cdot \sin \alpha - 45 \\ 0 &= -30 \cdot \sin \alpha + 70 - 2\lambda \Rightarrow \lambda = -15 \cdot \sin \alpha + 35 \end{aligned}$$

Der Schattenpunkt  $S_\alpha$  des Punktes  $F_\alpha^2$  befindet sich bei  $F_\alpha^2 = \begin{pmatrix} 30 \cdot \cos \alpha - 30 \cdot \sin \alpha + 70 \\ -45 - 195 \cdot \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

Dieser Punkt muss nun gemäß der Planungsskizze mit einer Projektionsmatrix  $P$  in die  $xy$ -Ebene abgebildet werden.

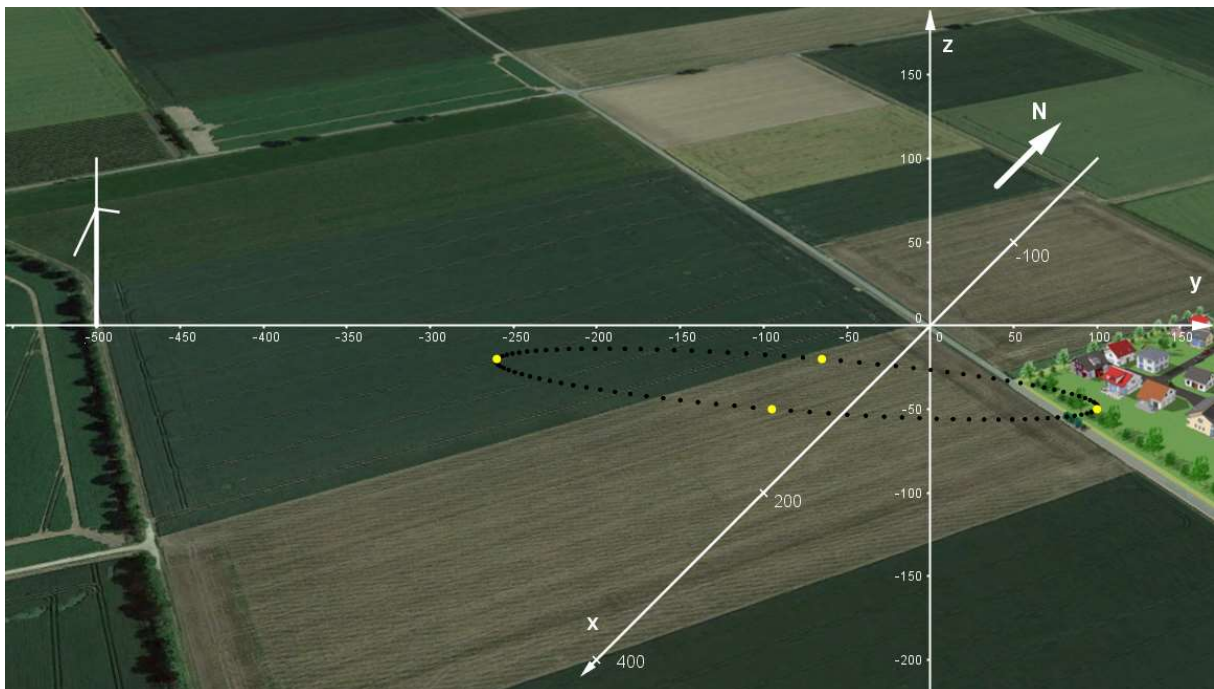
$$P = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_\alpha^1 = P \cdot F_\alpha^2 = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \cdot \cos \alpha - 30 \cdot \sin \alpha + 70 \\ -195 \cdot \sin \alpha - 45 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \cdot \cos \alpha + 15 \cdot \sin \alpha - 35 - 45 - 195 \cdot \sin \alpha \\ -15 \cdot \cos \alpha + 15 \cdot \sin \alpha - 35 \end{pmatrix}$$

$$S_\alpha^1 = \begin{pmatrix} -15 \cdot \cos \alpha + 180 \cdot \sin \alpha - 80 \\ -15 \cdot \cos \alpha + 15 \cdot \sin \alpha - 35 \end{pmatrix}$$

Berechnet man  $S_\alpha^1$  für verschiedene Werte von  $\alpha$ , erhält man Punkte, die man zum Umriss der Schattenfläche verbinden kann.

$$S_0^1 = \begin{pmatrix} -95 \\ -50 \end{pmatrix}, \quad S_{90}^1 = \begin{pmatrix} -260 \\ -20 \end{pmatrix}, \quad S_{180}^1 = \begin{pmatrix} -65 \\ -20 \end{pmatrix}, \quad S_{270}^1 = \begin{pmatrix} 100 \\ -50 \end{pmatrix}$$



Schattenbereich in der Planungsskizze

# GeoGebra-Datei

Schattenwurf.ggb

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe Anmelden

Eingabe:

**Algebra**

- Bild
- Liste
  - $P = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Punkt
  - $A = (-555, -221)$
  - $B = (171, -221)$
  - $\text{Flügel} = (30, 0, 0)$
  - $\text{Flügel}_{\text{Schatten}} = (100, -45, 0)$
  - $\text{Flügel}_{\text{rotiert-Narbe}} = (30, -500, 70)$
  - $\text{Flügel}_{\text{rotiert}} = (30, 0, 0)$
  - $\text{Narbe} = (0, -500, 70)$
  - $\text{PF} = (-515, 55)$
  - $\text{PS} = (-95, -50)$
- Schaltfläche
- Vektor
  - $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$
- Winkel
  - $\alpha = 0^\circ$

**Grafik**

$\alpha = 0^\circ$

Start  
Stop  
Spur-an  
Spur-aus

The image shows a 3D coordinate system with x, y, and z axes. The x-axis ranges from -500 to 400, the y-axis from -100 to 150, and the z-axis from -200 to 150. A point PF is located at (-515, 55) and a point PS at (-95, -50). A vector S is shown with components (2, 13, -2). The shadow of the wing is cast onto the ground plane. The ground plane is a grid of fields. A north arrow N is shown. The z-axis ranges from -200 to 150. The x-axis ranges from -500 to 400. The y-axis ranges from -100 to 150.

## Prozessbezogene Kompetenzen Qualifizierungsphase

### Mathematisch argumentieren (MA)

Die Schülerinnen und Schüler ...

- MA1 erläutern in inner- und außermathematischen Situationen Strukturen und Zusammenhänge und stellen darüber Vermutungen auf.
- MA2 begründen oder widerlegen Aussagen in angemessener Fachsprache mit mathematischen Mitteln und reflektieren die Vorgehensweise.
- MA3 reflektieren und bewerten Argumentationen und Begründungen auf Schlüssigkeit und Angemessenheit.
- MA4 vertreten eigene Problemlösungen und Modellierungen.
- MA5 eA vergleichen und bewerten verschiedene Begründungen für einen mathematischen Sachverhalt.
- MA6 eA reflektieren Beweisverfahren.
- MA7 eA variieren Situationen, stellen Vermutungen auf und untersuchen diese.

### Probleme mathematisch lösen (PL)

Die Schülerinnen und Schüler ...

- PL1 finden in inner- und außermathematischen Situationen mathematische Probleme, formulieren diese mit eigenen Worten und in mathematischer Fachsprache.
- PL2 überprüfen die Plausibilität der Ergebnisse.
- PL3 beschreiben, vergleichen und bewerten Lösungswege.
- PL4 wählen geeignete heuristische Strategien zum Problemlösen aus und wenden diese auch unter Nutzung der eingeführten Technologie an.
- PL5 reflektieren und bewerten die benutzten Strategien.
- PL6 eA variieren vorgegebene mathematische Probleme und untersuchen die Auswirkungen auf die Problemlösung.

### Mathematisch modellieren (MM)

Die Schülerinnen und Schüler ...

- MM1 vereinfachen durch Abstrahieren und Idealisieren Realsituationen, um sie einer mathematischen Beschreibung zugänglich zu machen und reflektieren die Vereinfachungsschritte.
- MM2 beschreiben Realsituationen und Realprobleme durch mathematische Modelle wie z. B. durch Funktionen, Zufallsversuche, Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Matrizen, Koordinaten und Vektoren.
- MM3 verwenden Regressionen zur Ermittlung eines mathematischen Modells.
- MM4 führen mit den Verfahren der Infinitesimalrechnung, mit denen der Koordinaten- und Vektorgeometrie und/oder der Matrizenrechnung sowie mit denen der Wahrscheinlichkeitsrechnung Berechnungen im Modell durch und interpretieren die Verfahren ggf. hinsichtlich der Realsituation.
- MM5 interpretieren Ergebnisse aus Modellrechnungen in der Realsituation und modifizieren ggf. das Modell.



- MM6 reflektieren die Grenzen von Modellen und der mathematischen Beschreibung von Realsituationen.
- MM7 ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Realsituationen zu und reflektieren so die Universalität von Modellen.

### **Mathematische Darstellungen verwenden (MD)**

Die Schülerinnen und Schüler ...

- MD1 verwenden verschiedene Darstellungsformen von Funktionen und wechseln zwischen diesen.
- MD2 verwenden geometrische und vektorielle Darstellungsformen für geometrische Gebilde und wechseln zwischen diesen.
- MD3 verwenden Matrizen und Diagramme zur Darstellung von Prozessen und wechseln zwischen diesen Darstellungsformen.
- MD4 stellen Zufallsexperimente auf verschiedene Weise dar und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten.
- MD5 eA begründen ihre Auswahl von Darstellungen und reflektieren allgemeine Vor- und Nachteile sowie die Grenzen unterschiedlicher Darstellungsweisen.

### **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (SFT)**

Die Schülerinnen und Schüler ...

- SFT1 verwenden mathematische Symbole zum Strukturieren von Informationen, zum Modellieren und zum Problemlösen.
- SFT2 reflektieren deren Verwendung und übersetzen zwischen symbolischer und natürlicher Sprache.
- SFT3 arbeiten mit Funktionstermen, mit Gleichungen und Gleichungssystemen sowie mit Vektoren und Matrizen.
- SFT4 setzen die eingeführte Technologie in allen Themenfeldern als sinnvolles Werkzeug zum Lösen mathematischer Probleme ein.
- SFT5 belegen ihr Grundverständnis für elementare algorithmische Verfahren, indem sie diese auch ohne die eingeführte Technologie in überschaubaren Situationen ausführen.
- SFT6 nutzen eine handelsübliche Formelsammlung.
- SFT7 eA kennen algorithmische Verfahren und können sie anhand von Beispielen erläutern.

### **Kommunizieren (K)**

Die Schülerinnen und Schüler ...

- K1 erfassen, interpretieren und reflektieren mathematikhaltige authentische Texte.
- K2 erläutern eigene Problembearbeitungen und Einsichten sowie mathematische Zusammenhänge mit eigenen Worten und unter Verwendung geeigneter Fachsprache.
- K3 dokumentieren Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse auch im Hinblick auf die verwendete Technologie und stellen jene verständlich dar.
- K4 präsentieren Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse unter Verwendung geeigneter Medien.
- K5 verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Schlüssigkeit und Vollständigkeit und gehen darauf ein.
- eA verwenden Fachtexte bei der selbstständigen Arbeit an mathematischen Problemen.